Geometria Analítica

Referenciais Cartesianos no Plano e no Espaço

Um referencial ortogonal e monométrico (o.m.) do **plano** é formado por dois eixos perpendiculares com a mesma unidade de medida.

Na figura está representado um referencial o.m. xOy.

No plano, um ponto é definido por duas coordenadas.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$

x: abcissa

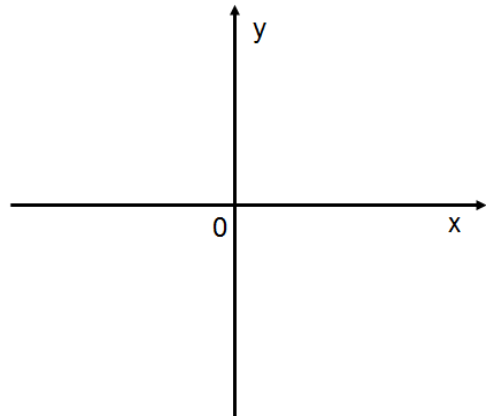
y: ordenada

P(x,y): coordenadas do ponto P

$\mathrm{P} \in 1^{\underline{o}}$ Quadrante $\Leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0$

$\mathrm{P} \in 2^{\underline{o}}$ Quadrante $\Leftrightarrow x < 0 \wedge y > 0$

$\mathrm{P} \in 3^{\underline{o}}$ Quadrante $\Leftrightarrow x < 0 \wedge y < 0$

$\mathrm{P} \in 4^{\underline{o}}$ Quadrante $\Leftrightarrow x > 0 \wedge y < 0$

Um referencial ortogonal e monométrico (o.m.) do **espaço** é formado por três eixos perpendiculares com a mesma unidade de medida.

Na figura está representado um referencial o.m. Oxyz.

No espaço, um ponto é definido por três coordenadas.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} * \mathbb{R} * \mathbb{R} = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbb{R}\}$

x: abcissa

y: ordenada

z: cota

P(x,y,z): coordenadas do ponto P

$\mathrm{P} \in 1^{\underline{o}}$ Octante $\Leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0$

$\mathrm{P} \in 2^{\underline{o}}$ Octante $\Leftrightarrow x < 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0$

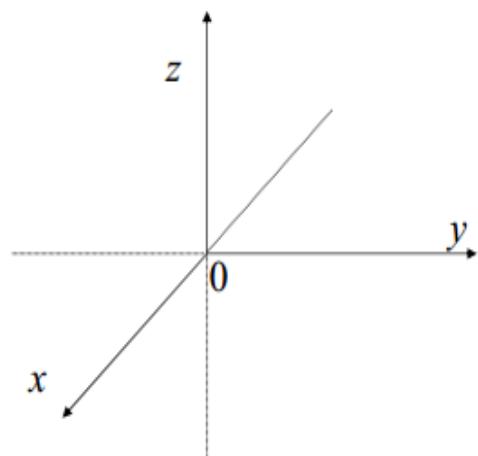
$\mathrm{P} \in 3^{\underline{o}}$ Octante $\Leftrightarrow x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0$

$\mathrm{P} \in 4^{\underline{o}}$ Octante $\Leftrightarrow x > 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0$

$\mathrm{P} \in 5^{\underline{o}}$ Octante $\Leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0$

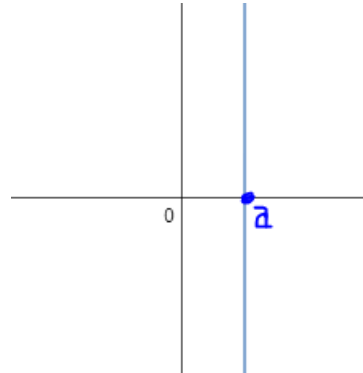
$\mathrm{P} \in 6^{\underline{o}}$ Octante $\Leftrightarrow x < 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0$

$\mathrm{P} \in 7^{\underline{o}}$ Octante $\Leftrightarrow x < 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0$

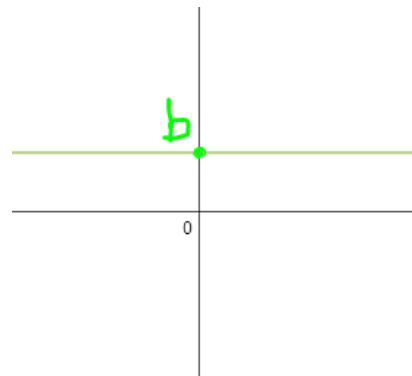
$\mathrm{P} \in 8^{\underline{o}}$ Octante $\Leftrightarrow x > 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0$

Retas paralelas aos eixos coordenados

Retas paralelas ao eixo Ox – retas verticais

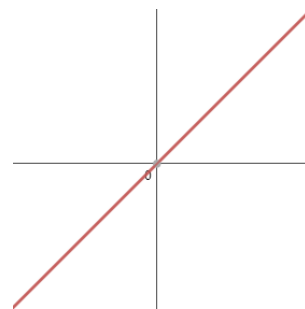
Uma reta vertical que passe pelo ponto de abcissa a tem equação:

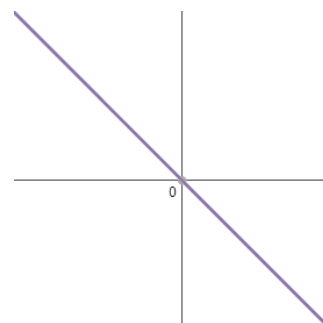
$$x = a$$

Retas paralelas ao eixo Oy – retas horizontais

Uma reta horizontal que passe pelo ponto de ordenada b tem equação:

$$y = b$$

Bissetrizes dos quadrantes ímpares e dos quadrantes pares.

A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta de equação:

$$y = x$$

A bissetriz dos quadrante pares á a reta de equação:

$$y = -x$$

Conjuntos definidos por conjunções e disjunções de condições

O símbolo $\wedge$ lê-se “e” e representa a operação lógica **conjunção** de condições. A conjunção de condições corresponde à interseção dos conjuntos-solução dessas condições.

O símbolo $\vee$ lê-se “ou” e representa a operação lógica **disjunção** entre condições. A disjunção entre condições corresponde à reunião dos conjuntos-solução dessas condições.

Negação de condições

O símbolo $\sim$ lê-se “negação de” e representa a operação lógica negação de uma condição.

$\sim (x = a) \Leftrightarrow x \neq a$

$\sim (x < a) \Leftrightarrow x \geq a$

$\sim (x \leq a) \Leftrightarrow x > a$

$\sim (x > a) \Leftrightarrow x \leq a$

$\sim (x \geq a) \Leftrightarrow x < a$

Primeiras leis de De Morgan

$\sim (a \wedge b) \Leftrightarrow \sim a \vee \sim b$

$\sim (a \vee b) \Leftrightarrow \sim a \wedge \sim b$

Simetria

Simetria no plano

Sejam (x, y) as coordenadas de um ponto P, em relação a um referencial o.m. xOy

Coordenadas do ponto P’ Simétricos de P	**Relativamente …**
P’(-x, -y)	… à origem do referencial
P’(x, -y)	… ao eixo Ox
P’(-x, y)	… ao eixo Oy
P’(y, x)	… à bissetriz dos quadrantes ímpares
P’(-y, -x)	… à bissetriz dos quadrantes pares

Simetria no espaço

Sejam (x, y, z) as coordenadas de um ponto P, em relação a um referencial o.m. Oxyz

Coordenadas do ponto P' **Simétricos de P**	**Relativamente …**
P'(-x, -y, -z)	… à origem do referencial
P'(x, -y, -z)	… ao eixo Ox
P'(-x, y, -z)	… ao eixo Oy
P'(-x, -y, z)	… ao eixo Oz
P'(x, y, -z)	… ao plano xOy
P'(x, -y, z)	… ao plano xOz
P'(-x, y, z)	… ao plano yOz

Distância entre dois pontos

No plano

A distância, d, entre dois pontos A(x_a, y_a) e B(x_b, y_b), num referencial o.m. Oxy é:

$$d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

No espaço

A distância, d, entre dois pontos A(x_a, y_a, z_a) e B(x_b, y_b, z_b), num referencial o.m. Oxy é:

$$d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

Circunferência

Chama-se circunferência de centro C e raio r ao conjunto de pontos P(x, y) do plano cuja distância a C é igual a r.

Uma equação da circunferência de centro C(x_c, y_c) e raio r é:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Círculo

Chama-se círculo de centro C e raio r ao conjunto de todos os pontos P(x, y) do plano que pertencem ou são interiores à circunferência de centro C e raio r.

Uma condição que define o círculo de centro C(x_c, y_c) e raio r é:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \leq r^2$$

Superfície Esférica

Chama-se superfície esférica ao lugar geométrico dos pontos do espaço que distam igualmente de um ponto fixo chamado centro.

Uma equação da superfície esférica de centro C(x_c, y_c, z_c) e raio r é:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

Esfera

Chama-se esfera à reunião do conjunto de pontos de uma superfície esférica com o conjunto de todos os pontos que lhe são interiores.

Uma condição que define a esfera de centro C(x_c, y_c, z_c) e raio r é:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \leq r^2$$

Ponto Médio

No plano

O ponto médio de um segmento de reta [AB], com A(x_a, y_a) e B(x_b, y_b), é dado por:

$$M(\frac{x_a + y_a}{2}, \frac{x_b + y_b}{2})$$

No espaço

O ponto médio de um segmento de reta [AB], com A(x_a, y_a, z_a) e B(x_b, y_b, z_b), é dado por:

$$M(\frac{x_a + y_a}{2}, \frac{x_b + y_b}{2}, \frac{z_a + z_b}{2})$$

Mediatriz

No plano, a mediatriz de um segmento de reta [AB] é o lugar geométrico dos pontos que distam o mesmo de A(x_a, y_a) e B(x_b, y_b). P é um ponto da mediatriz com coordenadas gerais (x, y).

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2$$

Plano Mediador

No plano, o plano mediador de um segmento de reta [AB] é o lugar geométrico dos pontos que distam o mesmo de A(x_a, y_a, z_a) e B(x_b, y_b, z_b). P é um ponto do plano mediador com coordenadas gerais (x, y, z).

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Leftrightarrow (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (z - z_a)^2 = (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 + (z - z_b)^2$$

Vetores

Ao conjunto de todos os segmentos de reta oritentados do plano ou do espaço que têm em comum a direção, o sentido e o comprimento chama-se vetor.

Vetores simétricos

O vetor que tem a mesma direção, o mesmo comprimento e sentido contrário ao de $\vec{u}$ chama-se vetor simétrico de $\vec{u}$ e representa-se por $-\vec{u}$.

Norma de um Vetor

A medida do comprimento de um vetor $\vec{u}$, numa determinada unidade, chama-se norma de $\vec{u}$ e representa-se por $\|\vec{u}\|$.

Vetor Nulo

Chama-se vetor nulo ao vetor de norma igual a zero. O vetor nulo representa-se por $\vec{0}$.

Soma de um ponto com um vetor

Dados um ponto A e um vetor $\vec{u}$, chama-se soma do ponto A com o vetor $\vec{u}$ ao ponto A' tal que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.

Operações com vetores

- Adição de vetores

Para determinar a adição entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, dispõe-se o vetor $\vec{u}$ e o vetor $\vec{v}$ de modo a que a extremidade de $\vec{u}$ coincida com a origem de $\vec{v}$. O vetor soma, $\vec{u} + \vec{v}$, tem origem na origem de $\vec{u}$ e extremidade na extremidade de $\vec{v}$.

- Subtração de vetores

Para determinar a diferença entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determina-se a soma de $\vec{u}$ com o simétrico de $\vec{v}$.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (\overrightarrow{-v})$$

- Multiplicação de um vetor por um número real

Se $k \neq 0$, então o produto de k por $\vec{u}$ é o vetor $k\vec{u}$ que:

- tem a direção de $\vec{u}$;
- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$;
- tem o mesmo sentido de $\vec{u}$ se $k > 0$ e tem sentido contrário ao de $\vec{u}$ se $k < 0$.

Vetores colineares

Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dizem-se colineares se e só se existir um número real $k \neq 0$, tal que $\vec{u} = k\,\vec{v}$.

Componentes e coordenadas de um vetor

Um referencial ortonormado (o.n.) é um referencial ortogonal e monométrico, onde se definiu uma base de vetores com direção e sentido dos semieixos positivos.

No plano

Referencial o.n. $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$$\vec{\imath} = (1,0)$$

$$\vec{\jmath} = (0,1)$$

Se $\vec{u}$ é um vetor representado num referencial o.n. $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ do plano, então existem números reais a e b tais que:

$$\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$$

As componentes do vetor $\vec{u}$ são $a\vec{\imath}$ e $b\vec{\jmath}$.

As coordenadas do vetor $\vec{u}$ são (a,b).

No espaço

Referencial o.n. $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

$$\vec{\imath} = (1,0,0)$$

$$\vec{\jmath} = (0,1,0)$$

$$\vec{k} = (0,0,1)$$

Se $\vec{u}$ é um vetor representado num referencial o.n. $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ do espaço, então existem números reais a, b e c tais que:

$$\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$$

As componentes do vetor $\vec{u}$ são $a\vec{\imath}, b\vec{\jmath}$ e $c\vec{k}$.

As coordenadas do vetor $\vec{u}$ são (a,b,c).

Igualdade de dois vetores

No plano

Dados dois vetores do plano $\vec{u} = (u_1,u_2)$ e $\vec{v} = (v_1,v_2)$,

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (u_1,u_2) = (v_1,v_2) \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2$$

No espaço

Dados dois vetores do espaço $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$,

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (u_1,u_2,u_3) = (v_1,v_2,v_3) \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3$$

Vetor como diferença de dois pontos

No plano

Dados dois pontos A(x_a, y_a) e B(x_b, y_b), o vetor $\overrightarrow{AB}$ é definido por:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_b, y_b) - (x_a, y_a) = (x_b - x_a, y_b - y_a)$$

No espaço

Dados dois pontos A(x_a, y_a, z_a) e B(x_b, y_b, z_a), o vetor $\overrightarrow{AB}$ é definido por:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_b, y_b, z_b) - (x_a, y_a, z_a) = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$$

Soma de um ponto com um vetor

No plano

Dados um ponto A(x_a, y_a) e um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$, a soma do ponto A com o vetor $\vec{u}$ é dada por:

$$A + \vec{u} = (x_a, y_a) + (u_1, u_2) = (x_a + u_1, y_a + u_2)$$

No espaço

Dados um ponto A(x_a, y_a, z_a) e um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, a soma do ponto A com o vetor $\vec{u}$ é dada por:

$$A + \vec{u} = (x_a, y_a, z_a) + (u_1, u_2, u_3) = (x_a + u_1, y_a + u_2, z_a + u_3)$$

Operação com vetores conhecidas as suas coordenadas

- Adição de vetores

No plano

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, então:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

No plano

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, então:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Norma de um vetor

No plano

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$, então $\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}$.

No espaço

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, então $\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$.

Equação vetorial de uma reta

Dado um ponto A e um vetor $\vec{u}$, a reta que passa por A e tem a direção de $\vec{u}$ pode ser definida por:

$$P = A + k\vec{u}, k \in \mathbb{R}$$

Ao vetor $\vec{u}$ chama-se vetor diretor da reta.

No plano

Uma equação vetorial da reta r que passa no ponto A(x_a, y_a) e tem direção de $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é:

$$(x, y) = (x_a, y_a) + k(u_1, u_2), k \in \mathbb{R}$$

No espaço

Uma equação vetorial da reta r que passa no ponto A(x_a, y_a, z_a) e tem direção de $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ é:

$$(x, y, z) = (x_a, y_a, z_a) + k(u_1, u_2, u_3), k \in \mathbb{R}$$

Equação reduzida de uma reta no plano

A equação reduzida de uma reta r, não vertical, é do tipo $y = mx + b$, sendo “m” o declive e “b” a ordenada na origem.

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é um vetor diretor da reta, então:

$$m = \frac{u_2}{u_1}, u_1 \neq 0$$

Duas retas são paralelas se têm o mesmo declive.